Cours de mathématiques - 6ème

M. Bak

2023-2024

Table des matières

1- Statistiques - 1

1.1 Organiser des données dans un tableau

Définition

Un **tableau** permet d'organiser et de regrouper des données pour pouvoir les lire plus facilement.
Les **tableaux à simple entrée** permettent de rassembler des données et de les présenter de façon organisée.

Exemple :
Ce tableau indique la répartition des poissons d'un aquarium en fonction de leur espèce.
On peut y lire par exemple que l'aquarium contient 3 Barbus à taches. On dit alors que l'*effectif* de barbus à taches est 3.

Espèces de poissons	Nombres de poissons
Nez-rouges	10
Barbus à taches	3
Poissons-roseaux	5

Définition

L'**effectif** d'une valeur représente le nombre de fois où cette valeur apparaît dans une série.

On peut également organiser les données dans des tableaux à double entrée.

Définition

On appelle **tableau à double entrée** un tableau dans lequel chaque valeur est caractérisée par deux informations : l'une donnée sur la ligne et l'autre sur la colonne.

Exemple :
Voici le nombre de médailles obtenues selon la nation et le type de médailles aux JO 2016.
Sur chaque ligne, on lit le type de médailles obtenues par un nation ; sur chaque colonne, on lit la répartition de chaque métal selon les pays.
On peut par exemple y lire que la Chine a obtenu 18 médailles d'argent aux JO 2016.
18 est appelé l'**effectif** de médailles d'argent pour la Chine.

	Or	Argent	Bronze
Etats-Unis	46	37	38
Grande-Bretagne	27	23	17
Chine	26	18	26

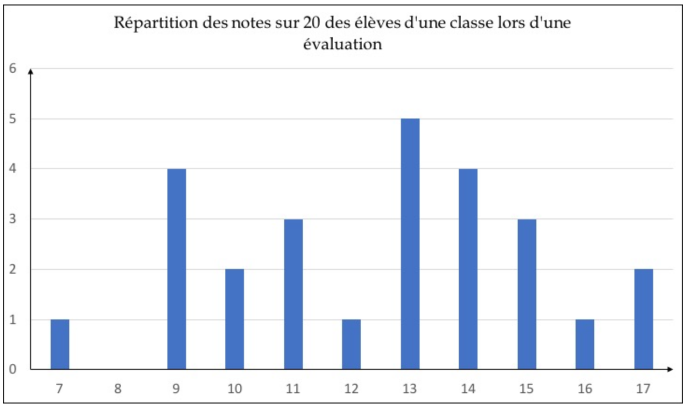
1.2 Différents types de diagrammes

1.2.1 Diagrammes en bâtons et en barres

Définition

Les diagrammes en bâtons (ou en barres) permettent de comparer facilement des données.

Exemple :



Lors d'une évalutation, on a tracé un diagramme en barres représentant les notes des élèves.
On peut par exemple y lire que 4 élèves ont obtenu 14 et que 2 élèves ont obtenu 17.

Remarque

Dans un diagramme en bâtons, la hauteur des bâtons indique les effectifs des différentes catégories.

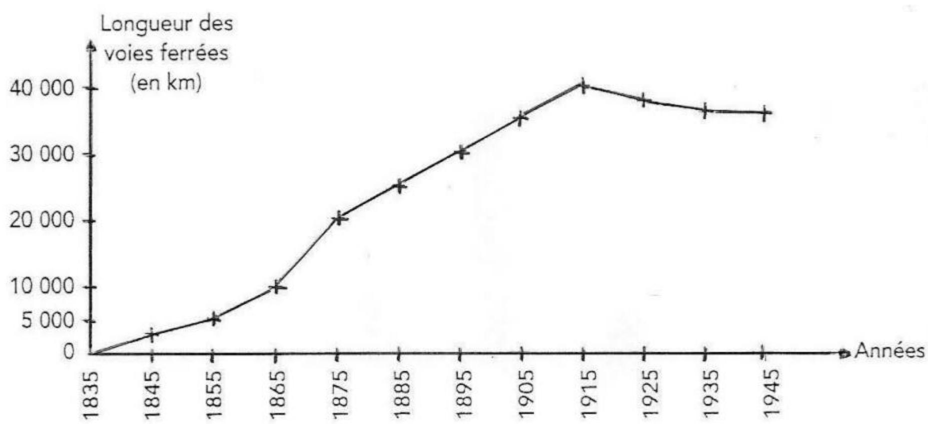
1.2.2 Graphiques

Définition

On appelle graphique cartésien un diagramme constitué de points.

Les graphiques cartésiens permettent de montrer l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre.

Exemple :
Le graphique ci-dessous représente l'évolution du réseau des voies ferrées en France de 1835 à 1945.



1) Quelle était la longueur des voies ferrées en 1865 ?
La longueur des voies ferrées en 1865 était d'environ 10 000 km.

2) En quelle année la longueur des voies ferrées était-elle de 20 000 km ?
La longueur des voies ferrées était de 20 000 km en 1875 environ.

3) En quelle année le réseau a-t-il atteint sa longueur maximale ?
Le réseau a atteint sa taille maximale en 1915 environ.

4) Entre 1895 et 1915, de combien de kilomètres le réseau a-t-il augmenté ?
Entre 1895 et 1915, la longueur des voies ferrées a augmenté d'environ 10 000 km.

5) Que se passe-t-il de 1915 à 1945 ?
Entre 1915 et 1945, la longueur des voies ferrées a diminué.

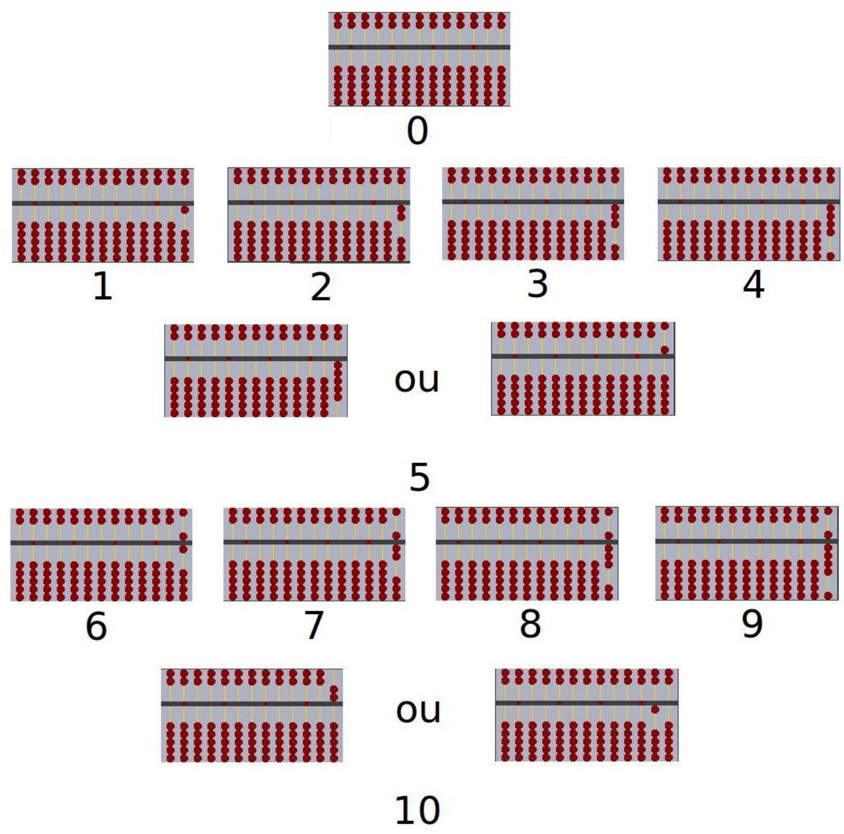
2- Nombres entiers

Intro

Aujourd'hui, nous écrivons les nombres entiers avec dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
On appelle ce système : le système décimal.
Avec ces chiffres, on peut écrire tous les nombres.

Manipulation

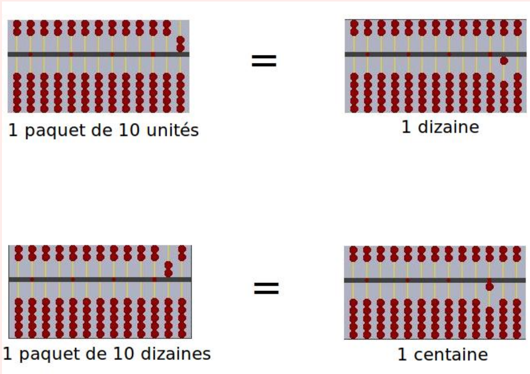
<u>Comment écrire ces dix chiffres sur un boulier ?</u>



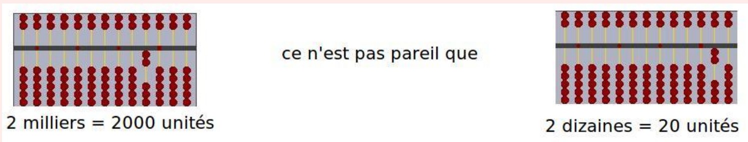
Propriété

L'écriture d'un nombre entier repose sur deux principes :

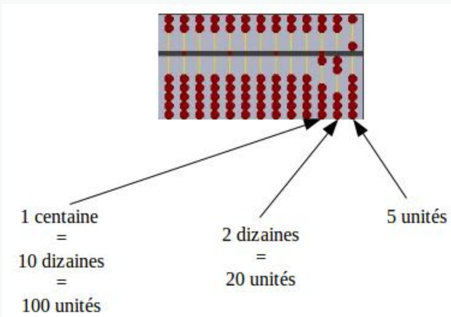
• Dès qu'il est possible de faire des paquets de dix, on le fait :



• la valeur indiquée par un chiffre dépend de sa position.



Exemple



On va donc pouvoir écrire que :

$$125 = 1 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1$$

À savoir

Les nombres entiers peuvent être placés dans le tableau de numération suivant :

Groupe des milliards			Groupe des millions			Groupe des milliers			Groupe des unités		
Centaines de milliards	Dizaines de milliards	Unités de milliards	centaines de millions	dizaine de millions	Unités de millions	centaine de milliers	dizaine de milliers	Unités de milliers	centaines	dizaines	unités
								8	3	5	4
				3	2	4	5	6	7	8	5

3- Droites et points

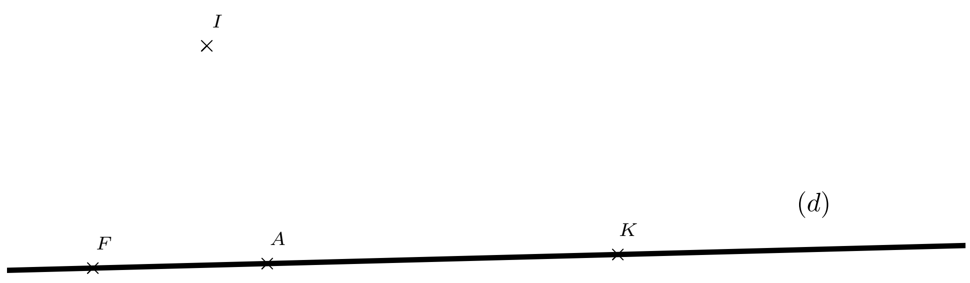
3.1 Points, droites, segments, demi-droites

3.1.1 Points alignés et droites

Définition

On dit que des **points** (à partir de trois) sont **alignés** s'ils appartiennent à une même droite.

Exemple :



Notation

• Une droite se note avec des parenthèses (deux points suffisent).
• Le symbole $\in$ signifie "appartient à" et le symbole $\notin$ signifie "n'appartient pas".

Exemple :
Dans l'exemple précédent, la droite (d) peut être également appelée (FK), (KF), (AK)...
On a :

$$K \in (AF) \qquad I \notin (FK) \qquad A \in (FK)$$

3.1.2 Segments et demi-droites

Définition

Un **segment** est une partie de droite limitée des deux côtés par deux points appelés les extrémités.

Notation

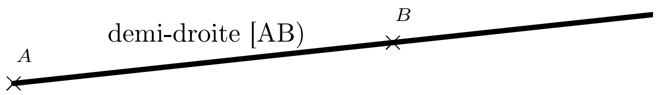
Lorsqu'on nomme un segment, on le met entre crochets.

Définition

Une **demi-droite** est une partie de droite limitée d'un seul côté par un point appelé l'**origine**.

Notation

Lorsqu'on nomme une demi-droite, on l'écrit avec un crochet puis une parenthèse, le crochet étant dédié à l'origine de la demi-droite.

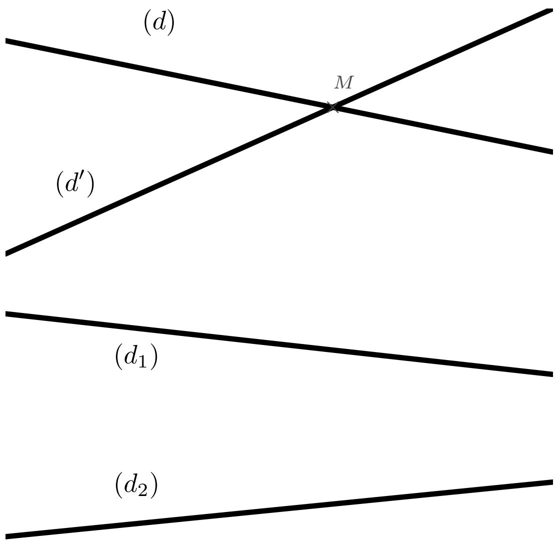


3.2 Droites sécantes, droites perpendiculaires

Définition

Deux droites qui se coupent sont des **droites sécantes**. Le point où elles se coupent est appelé le **point d'intersection** des deux droites.

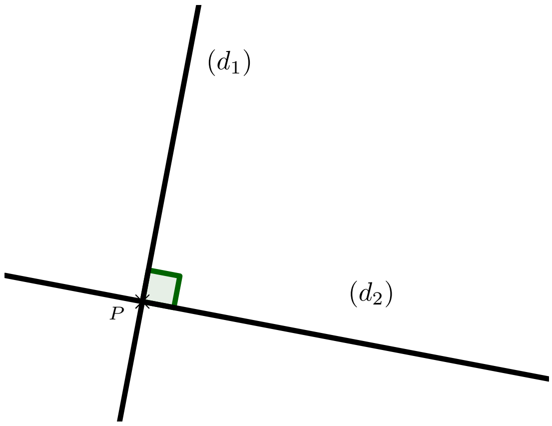
Exemple :



Les droites (d) et (d') sont sécantes en M. Le point M est leur point d'intersection.
(d_1) et (d_2) sont sécantes, seulement, il faut les prolonger pour apercevoir leur point d'intersection.

Définition

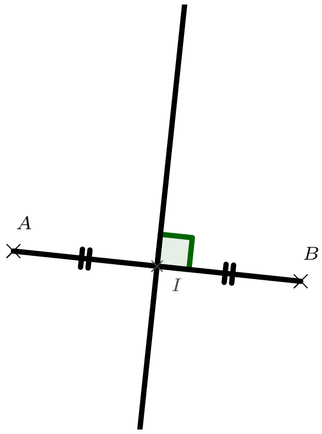
Deux droites sécantes qui forment un angle droit sont des **droites perpendiculaires**.



On note $(d_1) \perp (d_2)$.

À savoir

La **médiatrice d'un segment** est la droite qui passe le milieu du segment et qui lui est perpendiculaire.



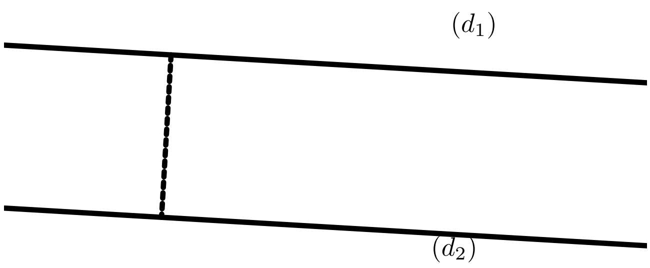
3.3 Droites parallèles

Définition

Deux droites qui ne sont pas sécantes sont **parallèles**.

Remarque

Quand deux droites sont parallèles, elles ont un "écart constant".



On note $(d_1)//(d_2)$.

4- Nombres décimaux - 1

4.1 Les entiers ne suffisent pas toujours

Dans certains cas, l'utilisation des nombres entiers n'est pas suffisante.
On doit parfois partager l'unité en un certain nombre de parties égales.
Comme l'écriture des nombres entiers repose sur le principe des "paquets de 10", on effectue des partages de l'unité en 10, 100, 1000... parties égales.

4.1.1 Rappel sur les fractions

Rappel

3 est le numérateur

$$\frac{3}{5}$$

5 est le dénominateur

Le numérateur indique le nombre de parts.
Le dénominateur indique le nombre de parts contenues pour faire une unité.

4.1.2 Vers la définition de nombre décimal

Définition

Une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000... est une **fraction décimale**.

Définition

Quand on additionne un nombre entier et des fractions décimales, on obtient un **nombre décimal**.

Exemple

Exemple : 3 unités + 2 dixièmes + 9 centièmes ou $3 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ est un nombre décimal.
Sa partie entière est 3.
Sa partie décimale est $\frac{2}{10} + \frac{9}{100}$.

Exemple

$5,47 \times 10 = 54,7$
$1,8 \times 100 = 180$
$2,89 \div 1000 = 0,00289$

Remarque

- Une fraction décimale est un nombre décimal : $\frac{6}{10} = 0 + \frac{6}{10}$.
- Un nombre entier est un nombre décimal dont la partie décimale est nulle : $5 = 5 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{0}{1000}$
- Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une seule fraction décimale. $3 + \frac{7}{10} = \frac{30}{10} + \frac{7}{10} = \frac{37}{10}$.

On peut alors proposer une autre formulation de la définition d'un nombre décimal :

Définition

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

4.2 Vers l'écriture décimale

4.2.1 L'écriture avec la virgule : écriture décimale

Notation

On peut simplifier l'écriture des nombres décimaux à l'aide d'un symbole : la **virgule**.

Exemple : $3 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100}$ peut s'écrire 3,24.

Sa partie entière est 3.
Sa partie décimale est 0,24.

On peut finalement placer les nombres dans un tableau.

Exemple

Dans le tableau ci-dessous, on a placé le nombre 2734,5603.

classe des milliards			classe des millions			classe des milliers			classe des unités			dixièmes	centièmes	millièmes	dix-millièmes	cent-millièmes	millionièmes
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u						
								2	7	3	4,	5	6	0	3		

(u = unité ; d = dizaine ; c = centaine)

4.2.2 Zéros inutiles

Conséquence

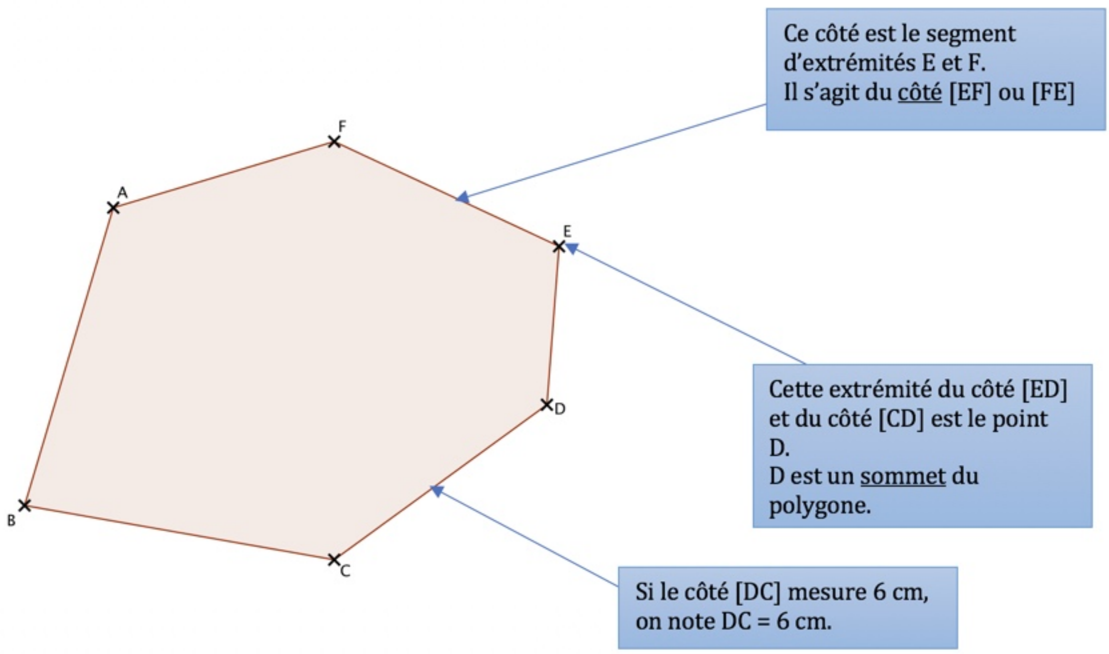
On peut ajouter ou supprimer des zéros à droite de la partie décimale d'un nombre décimal. Cela ne change pas sa valeur.

Exemples :

$16,80 = 16,8$ $\qquad$ $79,500 = 79,5$ $\qquad$ $8,0 = 8$ $\qquad$ $14,0 = 14$

5- Figures planes usuelles

5.1 Polygones

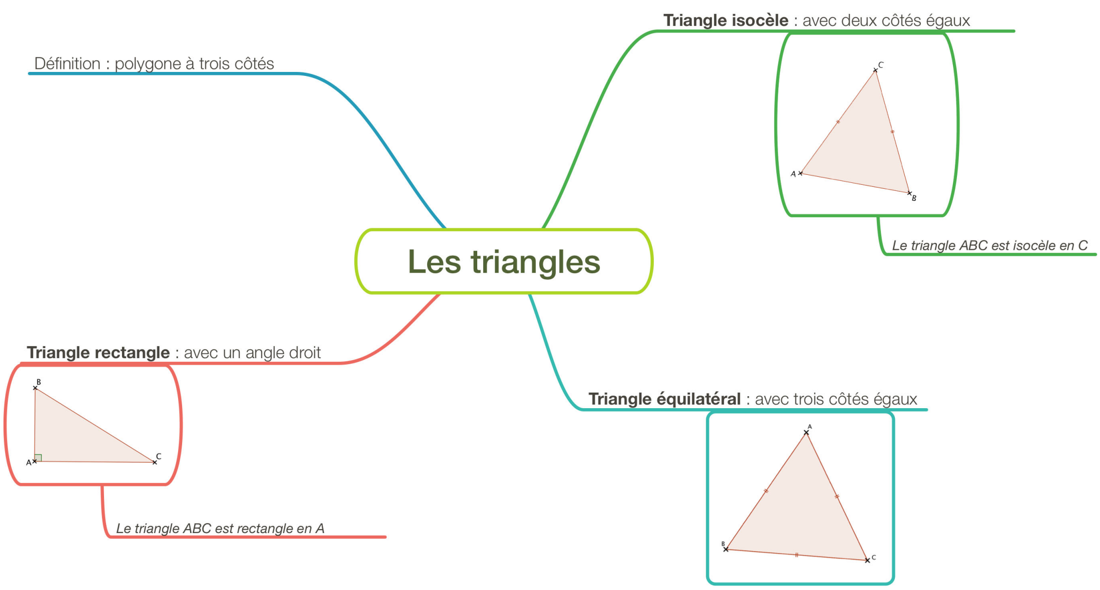


Le polygone ci-dessus a 6 côtés et 6 sommets.

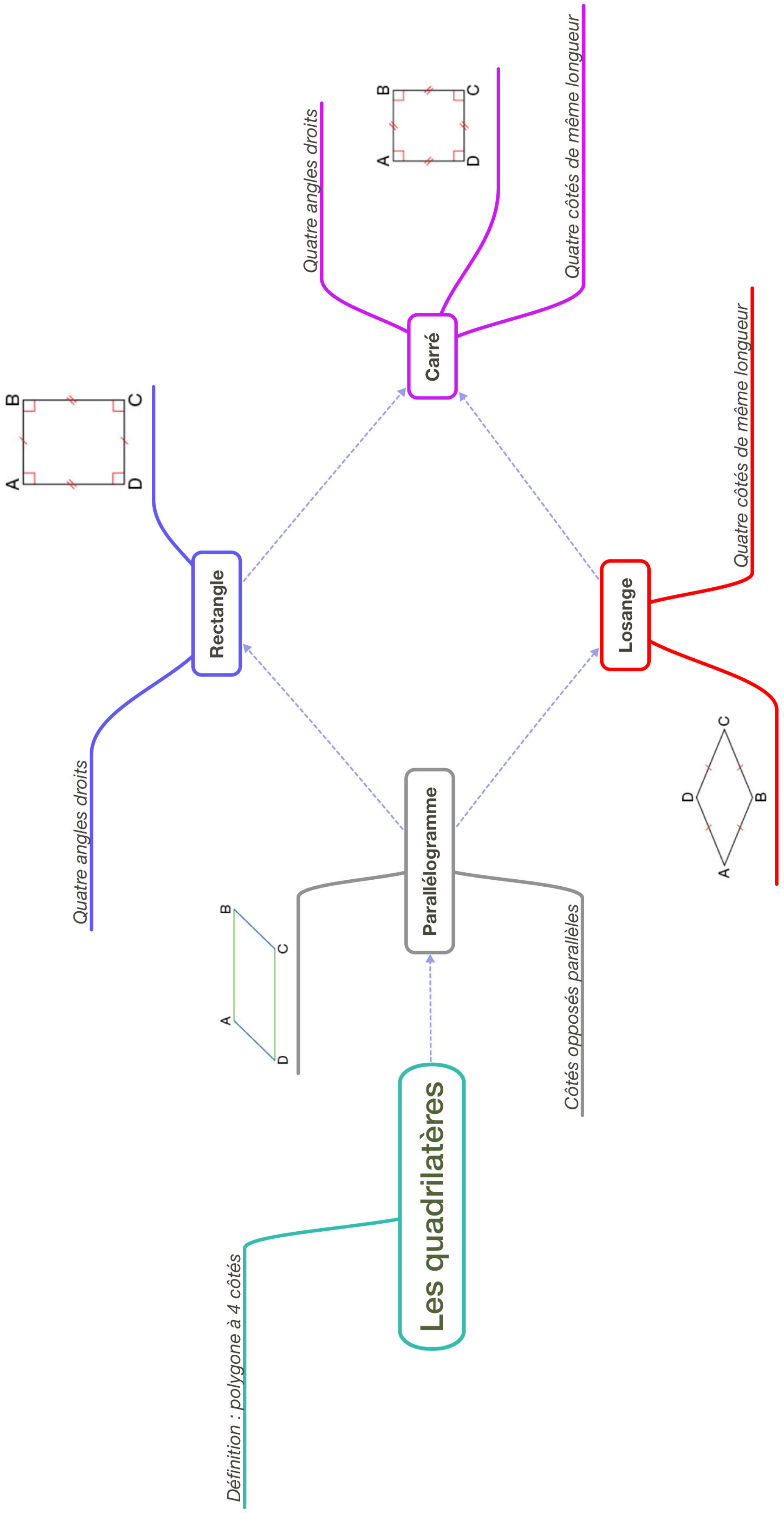
Méthode

Pour nommer un polygone, on donne la liste de ses sommets en respectant l'ordre dans lequel on les trouve en "faisant le tour" du polygone.
Un polygone a donc plusieurs noms : le polygone ci-dessus peut être nommé $ABCDEF$, $EDCBAF$...

5.2 Triangles



5.3 Quadrilatères



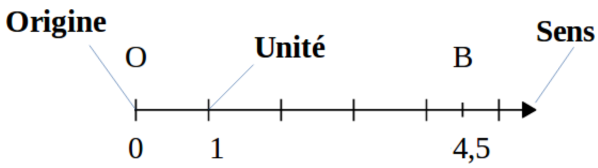
6- Nombres décimaux - 2

6.1 Représenter des nombres décimaux

Méthode

On peut représenter les nombres décimaux sur une demi-droite graduée en partageant l'unité en plusieurs parties égales.

Exemple :



Définition

Sur une demi-droite graduée, chaque point est repéré par un nombre appelé **abscisse**.

Ainsi, dans l'exemple précédent, le point B est repéré par le nombre 4,5.
On dit que l'abscisse du point B est 4,5 et on note B(4,5).

6.2 Comparaison

6.2.1 Comparer des nombres décimaux

Définition

Comparer des nombres décimaux, c'est dire si ces deux nombres sont égaux ou bien si l'un est plus petit ou plus grand que l'autre.

Méthode

Pour comparer deux nombres décimaux :

- on compare leurs parties entières ;
- si elles sont les mêmes, on compare :
  - — leurs chiffres des dixièmes ;
  - — s'ils sont les mêmes, leurs chiffres des centièmes ;
  - — ...

Exemples :
$18,24 > 16,7321$ car $18 < 16$
$7,3192 < 7,347$ car $1 < 4$

6.2.2 Encadrer des nombres décimaux

Définition

Encadrer un nombre décimal, c'est trouver deux nombres : l'un qui lui est inférieur, l'autre qui lui est supérieur.

Exemples :
$0 < 14,78 < 100$

$14 < 14,78 < 15$, on dit dans ce cas que 14,78 est encadré à l'unité car il y a une unité d'écart entre 14 et 15.
$14,7 < 14,78 < 14,8$, on dit dans ce cas que 14,78 est encadré au dixième car il y a un dixième d'écart entre 14,7 et 14,8.

3,9<3,93<4 signifie que 3,9<3,93 et 3,93<4.
On dit que 3,93 est encadré par 3,9 et 4 ou que 3,93 est intercalé entre 3,9 et 4.

Contrairement à ce qui se passe avec les entiers, on peut toujours intercaler un nombre décimal entre deux nombres.

7- Cercles et équidistance

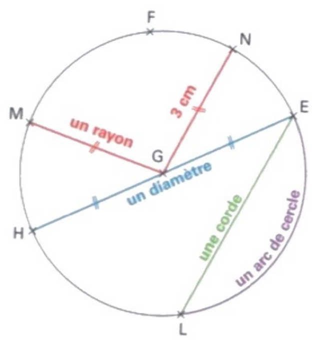
7.1 Le cercle

Définition

Tous les points situés à 2,3 cm du point O forment le cercle de centre O et de rayon 2,3 cm.
Cela signifie à la fois que :
• si un point appartient au cercle de centre O et de rayon 2,3 cm, alors il est situé à 2,3 cm du point O.
• Si un point est situé à 2,3 cm du poit O, alors il appartient au cercle de centre O et de rayon 2,3 cm.

Remarque

Le centre d'un cercle n'appartient pas à ce cercle.



À savoir

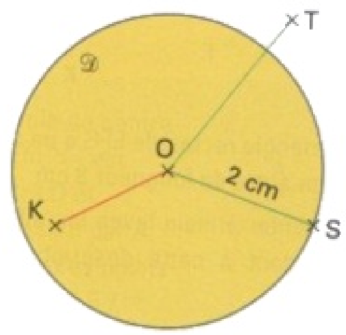
Le diamètre du cercle est le double du rayon :

$$\text{diamètre} = \text{rayon} \times 2$$

7.2 Le disque

Définition

Tous les points situés à 2 cm ou à moins de 2 cm du point O forment le disque de centre O et de rayon 2 cm.

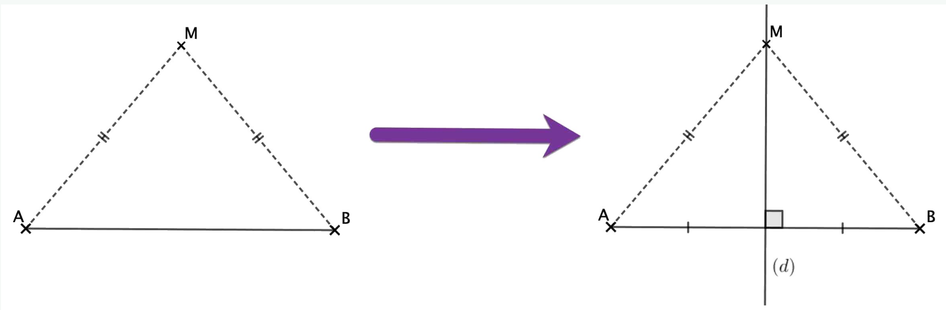


7.3 Médiatrice et équidistance

À savoir

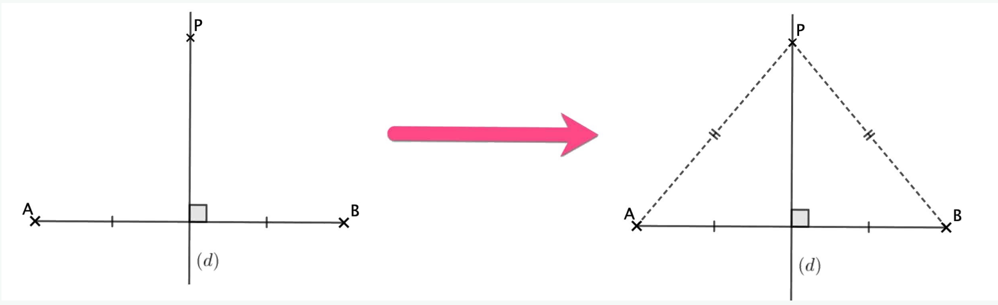
La médiatrice d'un segment est constituée de tous les points équidistants des extrémités de ce segment.

Exemple



MA=MB donc le point M appartient à la médiatrice (d) du segment [AB].

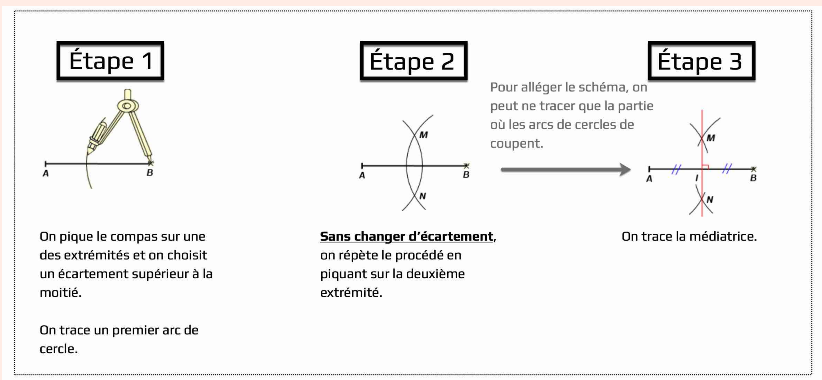
Exemple



Le point P appartient à la médiatrice du segment [AB] donc PA=PB.

Il est possible d'utiliser cette propriété afin de construire la médiatrice d'un segment en utilisant le compas.

Construction



8- Addition et soustraction

8.1 Vocabulaire

Définition

Le résultat d'une addition s'appelle une **somme** ; les nombres qui sont additionnés s'appellent les **termes**.

Exemple :
Dans 35,6 + 47,8 = 83,4 les termes sont 35,6 et 47,8 tandis que la somme est 83,4.

Propriété

Dans une addition de plus de deux termes, on peut organiser son calcul comme on veut.

Exemple :
24,5 + 12,4 + 3,5 = 28 + 12,4 = 40,4

Définition

Le résultat d'une soustraction s'appelle une **différence** ; les nombres qui figurent dans la soustraction sont appelés les **termes**.

Exemple :
Dans 708 - 254 = 454 les termes sont 708 et 254 tandis que la différence est 454.

8.2 Calculs posés

Méthode

Pour calculer une somme, il faut écrire les virgules les unes sous les autres afin d'additionner les dixièmes avec les dixièmes, les unités avec les unités...

Exemple :

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & & & & \\
 & & 2 & 7, & 3 & & \\
+ & 1 & 4 & 9, & 5 & 4 \\
\hline
 & 1 & 7 & 6, & 8 & 4
\end{array}$$

Méthode

Pour calculer une différence, il faut écrire les virgules l'une sous l'autre et compléter l'écriture des parties décimales avec des zéros afin qu'elles aient le même nombre de chiffres.

Exemple :

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 2 & 5 & 3, & 4 & {}_{1}0 & {}_{1}0 \\
- & & 4 & 2, & {}_{1}2 & {}_{1}7 & 3 \\
\hline
 & 2 & 1 & 1, & 1 & 2 & 7
\end{array}$$

8.3 Ordre de grandeur d'une somme, d'une différence

Définition

Lorsqu'on effectue un calcul, on peut prévoir approximativement le résultat mentalement en donnant ce qu'on appelle un **ordre de grandeur**.

Exemple

On souhaite donner un ordre de grandeur de la somme 1043,2 + 9976,36.
1043,6 est proche de 1 000.
9976,36 est proche de 10 000.
Donc un ordre de grandeur de 1043,2 + 9976,36 est 1 000 + 10 000, c'est à dire 11 000.
Ainsi 1043,2 + 9976,36 est proche de 11 000.

Exemple

On souhaite donner un ordre de grandeur de la différence 59 687,48 - 3 865,2.
59 687,48 est proche de 60 000.
3865,2 est proche de 4 000.
Donc un ordre de grandeur de 59 687,48 - 3 865,2 est 60 000 - 4 000, c'est à dire 56 000.
Ainsi 59 687,48 - 3 865,2 est proche de 56 000.

8.4 Additionner et soustraire des heures et des durées

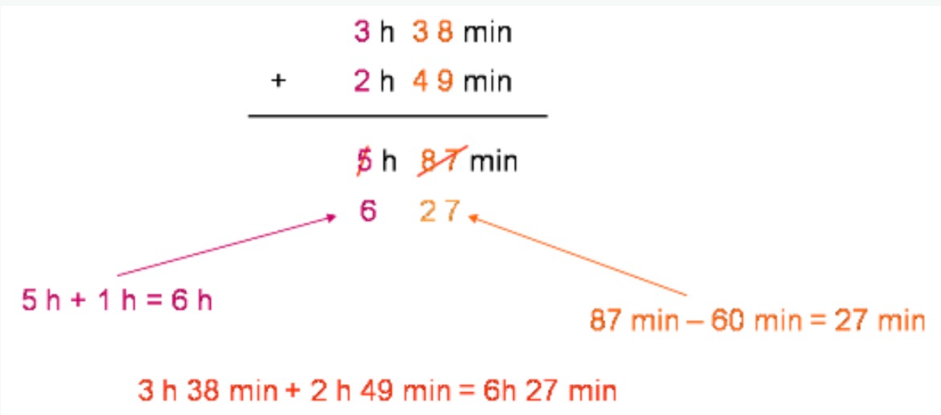
Rappel

1 heure c'est 60 minutes : 1 h = 60 min
1 minute c'est 60 secondes : 1 min = 60 s
1 journée c'est 24 heures : 1 j = 24 h

Méthode

Lorsqu'on pose une addition sur des durées, on additionne séparément chaque type d'unité puis on convertit les résultats qui doivent l'être.

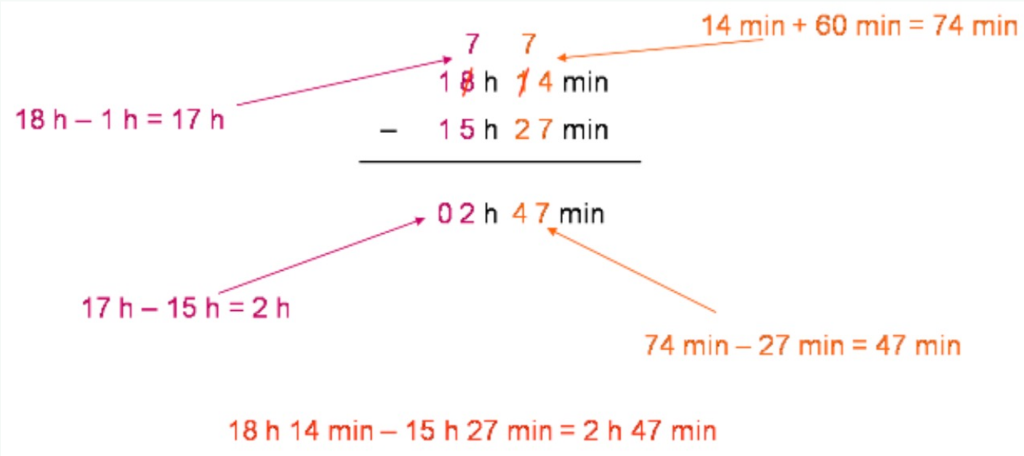
Exemple



Méthode

Lorsqu'on pose une soustraction sur des durées, si cela s'avère nécessaire, on prépare le travail en "cassant" des unités.

Exemple



Remarque

Pour calculer des durées, on peut souvent éviter le calcul posé et travailler mentalement.

Exemple

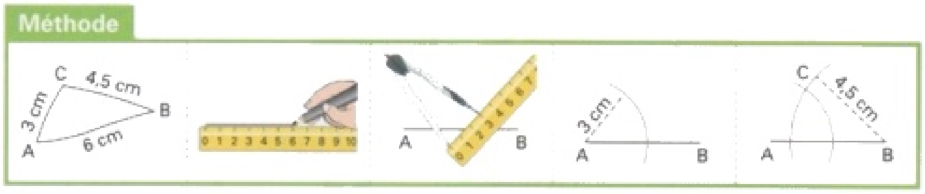
Un cours démarre à 9h45 et termine à 11h30. Combien de temps dure-t-il ?
On peut dire : "de 9h45 à 10h, il y a 15 min et de 10h à 11h30, il y a 1 h 30 min.
Or 15 min + 1 h 30 min = 1 h 45 min donc la durée du cours est de 1 h 45 min.

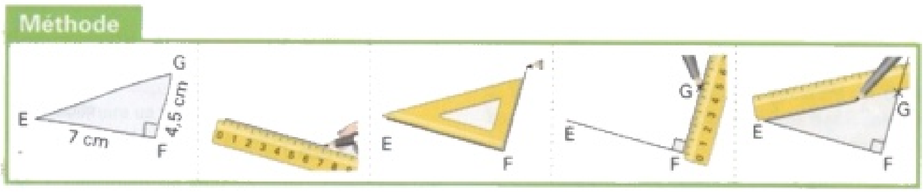
9- Triangles

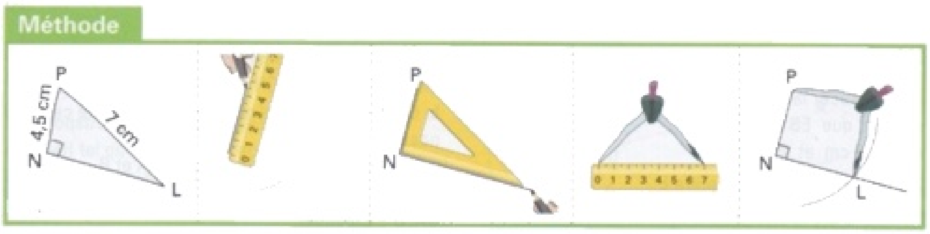
9.1 Une histoire de spaghetti

Un spaghetto mesure 25 cm environ. Casser un spaghetto en trois morceaux. Peut-on forcément construire un triangle avec ces trois morceaux ?
Il suffit que le plus grand côté du triangle (le plus long morceau de spaghetto) soit plus petit que la somme des deux autres côtés.

9.2 Construction de triangles







Définition

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit (c'est le côté le plus long).

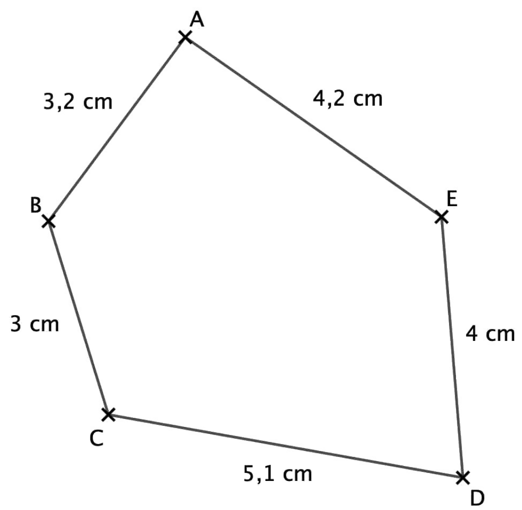
10- Longueurs et périmètres

Définition

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour. Il s'exprime à l'aide d'une unité de longueur.

Exemple :

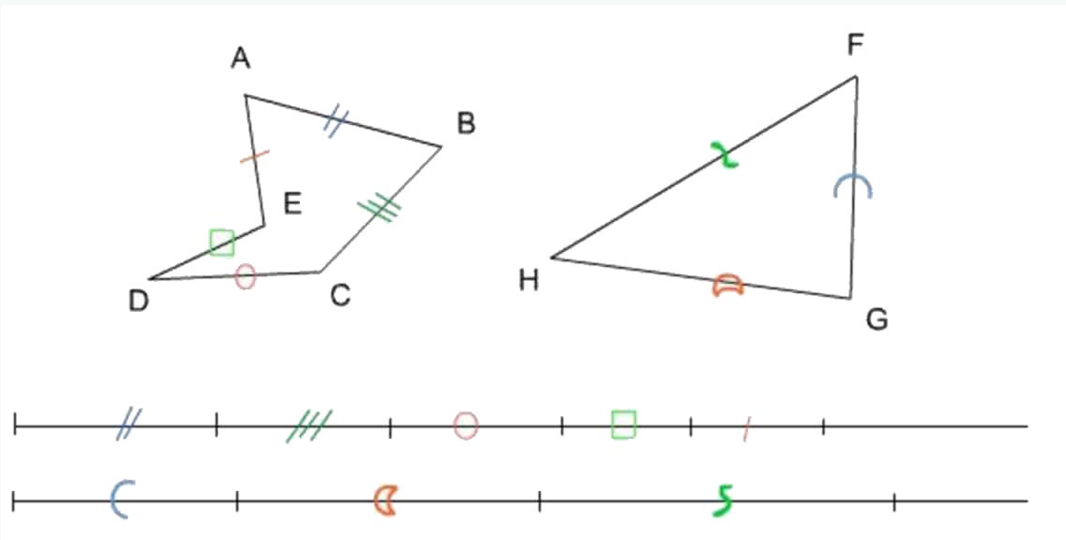
Pour calculer le périmètre de ce polygone, on additionne les longueurs de tous ses côtés :
3,2 cm + 3 cm + 5,1 cm + 4 cm + 4,2 cm = 19,5 cm
Le périmètre de ce polygone est de 19,5 cm.



Méthode

Pour comparer les périmètres de plusieurs polygones, on peut "déplier" chacun d'eux sur une demi-droite en reportant les longueurs de leurs côtés.

Exemple



Méthode

Pour convertir des unités de longueur, on effectue des multiplications ou des divisions par 10. On peut s'aider du tableau suivant :

TABLEAU DE CONVERSION DES LONGUEURS

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
kilomètres	*hectomètres*	*décamètres*	*mètres*	*décimètres*	*centimètres*	*millimètres*
= 1000 m	*= 100 m*	*= 10 m*	*= 1 m*	*1 m = 10 dm*	*1 m = 100 cm*	*1m = 1000 mm*

11- Multiplication

11.1 Généralités

Définition

Le résultat d'une multiplication s'appelle un **produit**. Les nombres qui sont multipliés sont appelés les **facteurs**.

Exemple :
Dans $25 \times 4 = 100$, 25 et 4 sont les facteurs tandis que 100 est le produit.

Propriété

Pour calculer un produit, on peut mettre les facteurs dans l'ordre que l'on veut afin de calculer plus facilement.

Exemple :

$A = 1,5 \times 5,1 \times 2$

$A = 1,5 \times 2 \times 5,1$

$A = 3 \times 5,1$

$A = 15,3$

11.2 Multiplication de deux nombres décimaux

Méthode

Pour multiplier à la main deux nombres décimaux :
1) On multiplie les deux nombres en ignorant les virgules ;
2) On place la virgule dans le produit en sachant que le résultat doit avoir autant de décimales que les deux facteurs réunis.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 3{,}1\;4\;1\;6 \\ \times \qquad 2{,}7 \\ \hline 2\;1\;9\;9\;1\;2 \\ 6\;2\;8\;3\;2\;\cdot \\ \hline 8{,}4\;8\;2\;3\;2 \end{array}$$

Remarque

Multiplier n'agrandit pas toujours ! En effet, $50 \times 0,3 = 15$ or 15 n'est pas supérieur à 50.

Propriété

Le produit de n'importe quel nombre par 0 est toujours égal à 0.

Propriété

Le produit de n'importe quel nombre par 1 est toujours égal à lui-même.

11.3 Multiplication par 0,1 ; 0,01 ; 0,001

Méthode

Pour multiplier un nombre par 0,1 ; 0,01 ; 0,001, on décale la virgule de un, deux ou trois rangs vers la gauche, en rajoutant éventuellement des "0".

Exemples :
$12,3 \times 0,1 = 1,23$
$12,3 \times 0,01 = 0,123$
$12,3 \times 0,001 = 0,0123$

11.4 Priorités opératoires

Propriété

• Dans un calcul sans parenthèse, on effectue les multiplications avant les additions et les soustractions.
• Dans un calcul avec parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

Exemples :

$$A = 2,1 + 3,5 \times 2$$
$$A = 2,1 + 7$$
$$A = 9,1$$

$$B = 2 \times (3,5 - 2,4)$$
$$B = 2 \times 1,1$$
$$B = 2,2$$

12- Parallèles et perpendiculaires

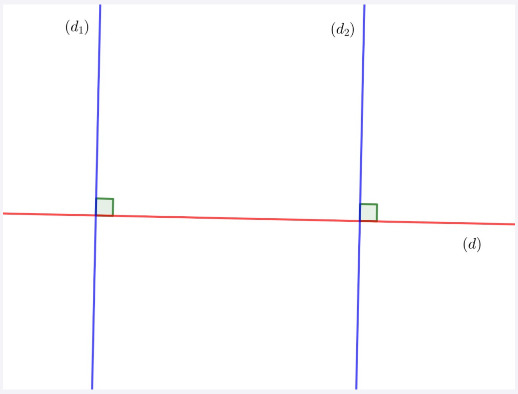
12.1 Démontrer que des droites sont parallèles

À savoir

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Exercice

En utilisant les codages de la figure, démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.



Résolution

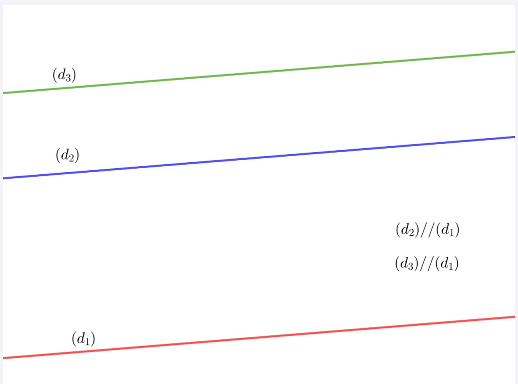
On sait que les droites (d_1) et (d_2) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (d).
Or si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

À savoir

Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Exercice

En utilisant les codages de la figure, démontrer que les droites (d_1) et (d_3) sont parallèles.



Résolution

On sait que les droites (d_2) et (d_3) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (d_1).
Or si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc les droites (d_2) et (d_3) sont parallèles.

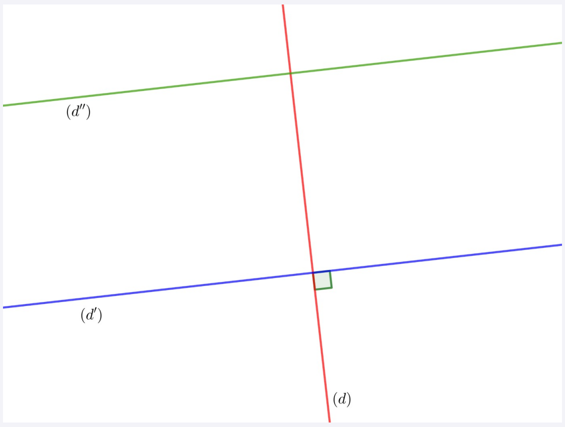
12.2 Démontrer que des droites sont perpendiculaires

À savoir

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite qui est perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Exercice

En utilisant les codages de la figure, démontrer que les droites (d) et (d'') sont perpendiculaires.



Résolution

On sait que les droites (d') et (d'') sont parallèles et que les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.
Or si deux droites sont parallèles, alors toute droite qui est perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Donc les droites (d) et (d'') sont perpendiculaires.